Kapitel VI
Über die Differentiation von transzendenten Funktionen *

Leonhard Euler

§178 Außer den unendlich vielen Geschlechtern von transzendenten oder nicht algebraischen Größen, welche das Integralkalkül immer wieder an die Hand gab, war ist es uns in der *Introductio in analysin infinitorum* möglich gewesen, zur Erkenntnis einiger des Öfteren gebrauchter Größen von dieser Art zu gelangen, welche uns die Lehre von Logarithmen und Kreisbogen dargeboten hatte. Weil wir ja also die Natur dieser Größen so klar dargestellt haben, dass sie fast mit der gleichen Leichtigkeit wie algebraische Größen in einer Rechnung behandelt werden können, werden wir auch deren Differentiale in diesem Kapitel ausfindig machen, damit deren natürliche Beschaffenheit und deren Eigenschaften besser verstanden werden und auf diese Weise der Zugang zum Integralkalkül, welches eine eigene Quelle von transzendenten Größen ist, eröffnet wird.

§179 Als erstes tauchen also die logarithmischen Größen oder Funktionen von x solcher Art auf, die außer algebraischen Ausdrücken auch den Logarithmus von x oder eine gewisse Funktion von selbigem involvieren. Weil, um diese zu differenzieren, die algebraischen Größen die Aufgabe nicht weiter ausreichen, liegt die ganze Schwierigkeit im Finden des Differentials

*Originaltitel: "De differentiatione functione transcendentium", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp. 120-143", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" des Logarithmus' einer gewissen Funktion von x. Weil aber sehr viele verschiedene Geschlechter von Logarithmen gegeben sind, die dennoch konstante Verhältnisse zueinander haben, werden wir hier hauptsächlich hyperbolische Logarithmen betrachten, weil aus ihnen die übrigen Logarithmen leicht gebildet werden können. Wenn nämlich der hyperbolische Logarithmus der Funktion $p = \log p$ war, dann wird der zu einer anderen Basis genommene Logarithmus der Funktion $p = m \log p$ sein, während m die Zahl bezeichnet, mit welcher die Relation des zur anderen Basis genommenen Logarithmus' zu den hyperbolischen ausgedrückt wird. Dieses Grundes wegen wird $\log p$ hier immer den hyperbolischen Logarithmus der Größe p bezeichnen.

§180 Wir wollen also das Differential des hyperbolischen Logarithmus' der Größe x suchen und man setze $y = \log x$, so dass der Wert des Differentials dy bestimmt werden muss. Es werde $x + dx$ anstelle von x gesetzt und so wird y in $y^{\mathrm{I}} = y + dy$ übergehen; daher wird man haben

$$y + dy = \log(x + dx) \quad \text{und} \quad dy = \log(x + dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Aber schon oben haben wir den hyperbolischen Logarithmus des Ausdruckes $1 + z$ so durch eine unendliche Reihe ausgedrückt, dass galt

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{etc.}$$

Nachdem also $\frac{dx}{x}$ für z gesetzt worden ist, werden wir erhalten

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{etc.}$$

Weil also alle Terme dieser Reihe in Bezug auf den ersten verschwinden, wird gelten

$$d.\log x = dy = \frac{dx}{x}.$$

Daher wird das Differential irgendeines anderen Logarithmus', dessen Verhältnis zum hyperbolischen $n : 1$ ist, $= \frac{ndx}{x}$ sein.

§181 Wenn also der Logarithmus, $\log p$ einer gewissen Funktion p von x vorgelegt wird, wird mit derselben Rechnung aufgefunden werden, dass sein Differential $= \frac{dp}{p}$ ist, woher man, um die Differentiale von Logarithmen zu finden, diese Regel ableitet:

Es werde das Differential der Größe p, deren Logarithmus vorgelegt wird, genommen und dieses wird durch die Größe p dividiert das gesuchte Differential des Logarithmus' geben.

Diese selbe Regel folgt auch aus der Form $\frac{p^0-1^0}{0}$, auf welche wir den Logarithmus von p im oberen Buch zurückgeführt haben: Es sei $\omega = 0$, und weil $\log p = \frac{p^\omega - 1}{\omega}$ ist, wird auch gelten

$$d.\log p = d.\frac{1}{\omega}p^\omega = p^{\omega-1}dp = \frac{dp}{p}$$

- wegen $\omega = 0$. Es ist aber anzumerken, dass $\frac{dp}{p}$ das Differential des hyperbolischen Logarithmus' von p ist, sodass, wenn der gewöhnliche Logarithmus von p vorgelegt werden würde, jenes Differential $\frac{dp}{p}$ mit dieser Zahl $0,43429448$ etc. multipliziert werden müsste.

§182 Mit Hilfe dieser Regel, der Logarithmus welcher Funktion von x auch immer vorgelegt wird, wird sein Differential sehr leicht gefunden werden können, so wie aus den folgenden Beispielen erkannt werden wird.

I. Es sei $y = \log x$, es wird gelten

$$dy = \frac{dx}{x}.$$

II. Wenn $y = \log x^n$ ist, werde $x^n = p$ gesetzt wird, dass $y = \log p$ ist, und es wird $dy = \frac{dp}{p}$ sein. Aber es ist $dp = nx^{n-1}dx$, woher wird

$$dy = \frac{ndx}{x}.$$

Dasselbe wird auch aus der Natur der Logarithmen erschlossen; denn, weil $\log x^n = n\log x$ ist, wird $d.\log x^n = nd.\log x = \frac{ndx}{x}$ sein.

III. Wenn $y = \log(1 + xx)$ ist, wird sein

$$dy = \frac{2xdx}{1+xx}.$$

IV. Wenn $y = \log \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$ ist, findet man, weil $y = -\log\sqrt{1-xx} = -\frac{1}{2}\log(1-xx)$ gilt,

$$dx = \frac{xdx}{1-xx}.$$

V. Wenn $y = \log \frac{x}{\sqrt{1+xx}}$, wird wegen $y = \log x - \frac{1}{2}\log(1+xx)$ werden

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}.$$

VI. Wenn $y = \log\left(x+\sqrt{1+xx}\right)$ ist, wird werden

$$dy = \frac{dx + xdx : \sqrt{1+xx}}{x+\sqrt{1+xx}} = \frac{xdx + dx\sqrt{1+xx}}{(x+\sqrt{1+xx})\sqrt{1+xx}};$$

weil Zähler und Nenner dieses Bruches durch $x+\sqrt{1+xx}$ teilbar sind, wird werden

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+xx}}.$$

VII. Wenn $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-xx}\right)$ ist, werde $x\sqrt{-1} = z$ gesetzt. Und wegen $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(z+\sqrt{1+zz}\right)$ wird durch das Vorhergehende $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}}dz : \sqrt{1+zz}$ sein. Daher wird wegen $dz = dx\sqrt{-1}$ werden

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

Obwohl also der vorgelegte Logarithmus imaginäre Größen involviert, wird sein Differential dennoch reell.

§183 Wenn die Größe, deren Logarithmus vorgelegt wird, Faktoren hat, dann wird der Logarithmus selbst auf diese Weise in mehrere andere aufgelöst werden. Wenn $y = \log pqrs$ vorgelegt wird, weil $y = \log p + \log q + \log r + \log s$ ist, wird auch gelten

$$dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}.$$

Diese Auflösung hat in gleicher Weise Geltung, wenn jene andere Größe, deren Logarithmus differenziert werden muss, ein Bruch war. Es sei nämlich $y = \log \frac{pq}{rs}$; wegen $y = \log p + \log q - \log r - \log s$ wird gelten

$$dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}.$$

Und auch Potenzen werden den Schwierigkeitsgrad nicht verändern; wenn nämlich $y = \log \frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$ war, wird wegen $y = m \log p + n \log q - \mu \log r - \nu \log$ gelten

$$dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}.$$

I. Wenn $y = \log(a+x)(b+x)(c+x)$ war, weil gilt

$$y = \log(a+x) + \log(b+x) + \log(c+x),$$

wird das gesuchte Differential werden

$$dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}.$$

II. Wenn $y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ war, wird sein

$$y = \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \log(1-x)$$

und daher wird auch gelten

$$dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}.$$

III. Wenn $y = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1+xx}+x}{\sqrt{1+xx}-x}$ ist, wird wegen

$$y = \frac{1}{2} \log \left(\sqrt{1+xx} + x\right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+xx} - x\right).$$

Dieses selbe wird leichter gefunden, wenn im Bruch $\frac{\sqrt{1+xx}+x}{\sqrt{1+xx}-x}$ die Irrationalität im Nenner durch Erweitern mit $\sqrt{1+xx} + x$ beseitigt wird; es wird nämlich hervorgehen

$$y = \frac{1}{2} \log \left(\sqrt{1+xx} + x\right)^2 = \log \left(\sqrt{1+xx} + x\right),$$

dessen Differential wir schon zuvor gesehen haben $dy = \frac{dx}{\sqrt{1+xx}}$ zu sein.

IV. Wenn $y = \log \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ ist, werde der Zähler dieses Bruches wie folgt festgelegt

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = p;$$

und der Nenner

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = q;$$

es wird $y = \log \frac{p}{q} = \log p - \log q$ und $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$ sein. Es ist in der Tat

$$dp = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-xx}}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) = \frac{-qdx}{2\sqrt{1-xx}}$$

und

$$dq = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{pdx}{2\sqrt{1-xx}}.$$

Daher wird werden

$$\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-qdx}{2p\sqrt{1-xx}} - \frac{pdx}{2q\sqrt{1-xx}} = \frac{-(pp+qq)dx}{2pq\sqrt{1-xx}}.$$

Aber es ist $pp + qq = 4$ und $pq = 2x$, woher sein wird

$$dy = -\frac{dx}{x\sqrt{1-xx}}.$$

Dieses Differential wird aber leichter gefunden werden, wenn der vorgelegte Logarithmus so transformiert wird

$$y = \log \frac{1+\sqrt{1-xx}}{x} = \log\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{xx} - 1}\right).$$

Denn nach Setzen von $\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{xx} - 1} = p$ wird sein

$$dp = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{x^3\left(\frac{1}{xx} - 1\right)} = -\frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{xx\sqrt{1-xx}} = -\frac{dx(1+\sqrt{1-xx})}{xx\sqrt{1-xx}},$$

und daher wird wegen $p = \frac{1+\sqrt{1-xx}}{x} dy = \frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x\sqrt{1-xx}}$ sein, wie zuvor.

§184 Weil also die ersten Differentiale der Logarithmen, wenn sie durch dx dividiert werden, algebraische Größen sind, werden die zweiten Differentiale und die aller folgenden Ordnungen durch die Vorschriften des vorausgehenden Kapitels leicht gefunden, wenn freilich das Differential dx als konstant angenommen wird. So wird für $y = \log x$ gesetzt sein

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dx}{x} && \text{und} && \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \\ ddy &= \frac{-dx^2}{x^2} && \text{und} && \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2} \\ d^3y &= \frac{2dx^3}{x^3} && \text{und} && \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3} \\ d^4y &= \frac{-6dx^4}{x^4} && \text{und} && \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{4^3} \end{aligned}$$

Und wenn p eine algebraische Größe war und $y = \log p$ ist, auch wenn y keine algebraische Größe ist, werden dennoch $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. algebraische Funktionen von x sein.

§185 Nachdem die Differentiation der Logarithmen erläutert worden ist, werden Funktionen, die aus algebraischen und Logarithmen gemischt sind, leicht differenziert werden können, genauso wie die, die allein aus Logarithmen zusammengesetzt sind, wie aus den folgenden Beispielen klar werden wird.

I. Wenn $y = (\log x)^2$ ist, werde $\log x = p$ gesetzt und wegen $y = p^2$ wird $dy = 2pdp$ sein, aber es ist $dp = \frac{dx}{x}$; und daher wird sein

$$dy = \frac{2dx}{x} \log x.$$

II. Auf die gleiche Weise, wenn $y = (\log x)^n$ ist, wird gelten

$$dy = \frac{ndx}{x} (\log x)^{n-1},$$

woher, wenn $y = \sqrt{\log x}$ ist, wegen $n = \frac{1}{2}$, $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{\log x}}$ sein wird.

III. Und wenn p irgendeine Funktion von x war und $y = (\log p)^n$ gesetzt wird, wird sein

$$dy = \frac{ndp}{p}(\log p)^{n-1}.$$

Daher, weil das Differential dp durch die vorhergehenden Dinge angegeben werden kann, wird auch das Differential von y bekannt sein.

IV. Wenn $y = \log p \cdot \log q$ ist und p und q irgendwelche Funktionen von x waren, wird nach der oben gegebenen Regel für Produkte gelten

$$dy = \frac{dp}{p}\log q + \frac{dq}{q}\log q.$$

V. Wenn $y = x \log x$ ist, wird nach derselben Regel gelten

$$dy = dx \log x + \frac{xdx}{x} = dx \log x + dx.$$

VI. Wenn $y = x^m \log x - \frac{1}{m}x^m$ ist, wird nach termweise durchgeführter Differentiation $d.x^m \log x = mx^{m-1}dx \log x + x^{m-1}dx$ und $d.\frac{1}{m}x^m = x^{m-1}dx$ aufgefunden werden, woher gelten wird

$$dy = mx^{m-1}dx \log x.$$

VII. Wenn $y = x^m(\log x)^n$ ist, wird werden

$$dy = mx^{m-1}dx(\log x)^n + nx^{m-1}d(\log x)^{n-1}.$$

VIII. Wenn Logarithmen von Logarithmen auftauchen, wie wenn $y = \log \log x$ war, werde $\log x = p$ gesetzt; es wird $y = \log p$ und $dy = \frac{dp}{p}$ sein; aber es ist $dp = \frac{dx}{x}$, woher werden wird

$$dy = \frac{dx}{x \log x}.$$

IX. Und wenn $y = \log \log \log x$ war, wird, wenn $\log x = p$ gesetzt wird, $y = \log \log p$ werden und es wird durch das vorhergehende Beispiel $dy = \frac{dp}{p \log p}$ sein; Aber es ist $dp = \frac{dx}{x}$, nach Einsetzen welcher Werte man haben wird

$$dy = \frac{dx}{x \log x \cdot \log \log x}.$$

§186 Nachdem die Differentiation von Logarithmen erklärt worden ist, wollen wir zu Exponentialgrößen fortschreiten oder zu Potenzen solcher Art, deren Exponenten variabel sind. Differentiale von Funktionen von x von dieser Art können auf diese Weise durch logarithmische Differentiation gefunden werden. Es sei also das Differential von a^x gesucht; um dieses ausfindig zu machen, werde $y = a^x$ gesetzt und es wird durch Nehmen von Logarithmen $\log y = x \log a$ sein. Nun werden die Differentiale genommen und es wird $\frac{dy}{y} = dx \log a$ erhalten werden, woher $dy = ydx \log a$ wird; weil aber $y = a^x$ ist, wird $dy = a^x dx \log a$ sein, welches das Differential von a^x ist. Auf die gleiche Weise, wenn p irgendeine Funktion von x ist, wird das Differential dieser Exponentialgröße a^p also $= a^p dp \log a$ sein.

§187 Dieses selbe Differential kann aber direkt aus den in der *Introductio* dargestellten Eigenschaften der Exponentialgrößen abgeleitet werden. Es sei nämlich a^p vorgelegt, während p irgendeine Funktion x bezeichnet, welche für $x + dx$ anstelle von x gesetzt in $p + dp$ übergehe. Daher, wenn $y = a^p$ gesetzt wird, wird, wenn x in $x + dx$ übergeht, $y + dy = a^{p+dp}$ sein und daher wird gelten

$$dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1).$$

Wir haben aber oben gezeigt, dass jede Exponentialgröße a^z mit einer Reihe solcher Art ausgedrückt wird

$$1 + z \log a + \frac{z^2 (\log a)^2}{2} + \frac{z^3 (\log a)^3}{6} + \text{etc.}:$$

daher wird gelten

$$a^{dp} = 1 + dp \log a + \frac{dp^2 (\log a)^2}{2} + \text{etc.}$$

und $a^{dp} - 1 = dp \log a$ sein, weil die folgenden Terme in Bezug auf $dp \log a$ alle verschwinden. Als logische Konsequenz wird gelten

$$dy = d.a^p = a^p dp \log a.$$

Daher wird das Differential der Exponentialgröße a^p das Produkt aus der Exponentialgröße selbst, dem Differential des Exponenten, dp, und dem Logarithmus der konstanten Größe a, welche zum variablen Exponenten erhoben worden ist, sein.

§188 Wenn also e die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, dass $\log e = 1$ ist, wird das Differential der Größe e^x sein

$$= e^x dx.$$

Und wenn dx als konstant angenommen wird, wird das Differential von diesem $= e^x dx^2$ sein, welches das zweite Differential von e^x ist. Auf die gleiche Weise wird das dritte Differential $= e^x dx^3$ sein. Daher wird, wenn $y = e^{nx}$ ist, sein

$$\frac{dy}{dx} = ne^{nx} \quad \text{und} \quad \frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx} \quad \text{und weiter} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx} \quad \text{etc.}$$

Daher tritt es klar zu tage, dass das erste, zweite und die übrigen folgenden Differentiale von e^{nx} eine geometrische Progression festlegen und und daher wird das Differential der Ordung m von e^{nx} - natürlich $d^m y$ - $= n^m e^{nx} dx^m$ und deshalb also $\frac{d^m y}{y dx^m}$ die konstante Größe n^m sein.

§189 Wenn die Größe, die erhoben wird, selbst variabel war, wird ihr Differential auf die gleiche Weise ausfindig gemacht werden können. Es seien p und q irgendwelche Funktionen von x und es werde die Exponentialgröße $y = p^q$ vorgelegt. Nach Nehmen von Logarithmen wird $\log y = q \log p$ sein, nach Differenzieren von welchen sein wird

$$\frac{dy}{y} = dq \log p + \frac{qdp}{p},$$

woher wird

$$dy = ydq \log p + \frac{yqdp}{p} = p^q dq \log p + qp^{q-1} dp$$

- wegen $y = p^q$. Dieses Differential besteht also aus zwei Gliedern, deren erstes $p^q dq \log p$ entspringt, wenn die vorgelegte Größe p^q so differenziert wird, als wäre p eine konstante Größe und allein der Exponent q variabel; das andere Glied $qp^{q-1}dp$ entspringt hingegen, wenn in der vorgelegten Größe p^q der Exponent q als Konstante betrachtet wird und allein die Größe p, als wäre sie variabel, behandelt wird. Und dieses Differential hätte also mit der oben [§ 170] angegebenen Differentiationsregel gefunden werden können.

§190 Das Differential desselben Ausdrucks p^q kann aber auch auf diese Weise aus der Natur der Exponentialgrößen gefunden werden. Es sei $y = p^q$ und es wird, nachdem $x + dx$ anstelle von x gesetzt worden ist, natürlich $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$ sein; wenn dieser Ausdruck auf die gewohnte Weise in eine Reihe aufgelöst wird, wird werden

$$y + dy = p^{q+dq} + (q + dq)p^{q+dq-1}dp + \frac{(q + dq)(q + dq - 1)}{1 \cdot 2}p^{q+dq-2}dp^2 + \text{etc.}$$

und daher

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)p^{q+dq-1}dp;$$

denn die folgenden Terme, die höhere Potenzen von dp beinhalteten, werden in Bezug auf $(q + dq)p^{q+dq-1}dp$ verschwinden. Aber es ist

$$p^{q+dq} - p^q = p^q(p^{dq} - 1) = p^q\left(1 + dq\log p + \frac{dq^2(\log p)^2}{2} + \text{etc.} - 1\right) = p^q dq\log p.$$

Wenn wir hingegen im anderen Term $(q + dq)p^{q+dq-1}dp$ anstelle von $q + dq$ q schreiben, wird $qp^{q-1}dp$ entspringen und daher wird wie zuvor $dy = p^q dq\log p + qp^{q-1}dp$ sein.

§191 Dieses selbe Differential wird aber auch auf diese Weise sogar noch leichter aus der Natur der Exponentialgrößen ausfindig gemacht werden. Weil nämlich nach Nehmen von e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, $p^q = e^{q\log p}$ ist, denn der Logarithmus jeder der beiden ist derselbe $q\log p$, wird $y = e^{q\log p}$ sein. Daher, weil nun die erhobene Größe e konstant ist, wird gelten

$$dy = e^{q\log p}\left(dq\log p + \frac{qdp}{p}\right),$$

wie wir zuvor in der in § 187 gegebenen Regel gezeigt haben. Es werde also wieder p^q anstelle von $e^{q\log p}$ eingesetzt und es wird werden

$$dy = p^q dq\log p + p^q qdp : p = p^q dq\log p + qp^{q-1}dp.$$

Wenn also $y = x^x$ war, wird $dy = x^x dx\log x + x^x dx$ sein; und daher werden auch die weiteren Differentiale bestimmt werden; es wird nämlich aufgefunden werden

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x} + (1+\log x)^2\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x\left((1+\log x)^3 + \frac{3(1+\log x)}{x} - \frac{1}{xx}\right)$$

etc.

§192 Von den Differentialen von Funktionen von dieser Art, welche Exponentialgrößen umfassen, sind besonders die folgenden Beispiele anzumerken, welche ihren Ursprung aus der Differentiation der Formel $e^x p$ haben; es ist aber

$$d.e^x p = e^x dp + e^x + pdx = e^x(dp + pdx).$$

I. Wenn $y = e^x x^n$ ist, wird sein

$$dy = e^x n x^{n-1} dx + e^x x^n dx \quad \text{oder} \quad dy = e^x dx(nx^{n-1} + x^n).$$

II. Wenn $y = e^x(x-1)$ ist, wird gelten

$$dy = e^x x dx.$$

III. Wenn $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$ ist, wird sein

$$dy = e^x xx dx.$$

IV. Wenn $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ ist, wird sein

$$dy = e^x x^3 dx.$$

§193 Wenn die Exponenten selbst erneut Exponentialgrößen waren, wird die Differentiation nach denselben Vorschriften durchgeführt werden. So, wenn diese Größe e^{e^x} differenziert werden muss, werde $e^x = p$ gesetzt, dass gilt

$$y = e^{e^x} = e^p;$$

es wird $dy = e^p dp$ sein; aber es ist $dp = e^x dy$, woher, wenn $y = e^{e^x}$ war, gelten wird

$$dy = e^{e^x} e^x dx;$$

und wenn $y = e^{e^{e^x}}$ ist, wird sein

$$dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx.$$

Wenn daher hingegen $y = p^{q^r}$ war, werde $q^r = z$ gesetzt; es wird sein

$$dy = p^z dz \log p + z p^{z-1} dp, \quad \text{aber} \quad dz = q^r dr \log q + r q^{r-1} dq,$$

woher gilt

$$dy = p^z q^r dr \log p \cdot \log q + p^z r q^{r-1} dq \log p + p^z q^r dp : p.$$

Daher, wenn $y = p^{q^r}$ ist, wird sein

$$dy = p^{q^r} q^r \left(dr \log p \cdot \log q + \frac{r dq \log p}{q} + \frac{dp}{p} \right).$$

Auf diese Weise, welche Exponentialgröße auch immer auftritt, wird also ihr Differential gefunden werden können.

§194 Wir wollen also zu transzendenten Größen voranschreiten, zu deren Erkenntnis uns oben die Betrachtung von Kreisbogen geführt hat. Es sei im Kreis, dessen Radius wir durchgehend der Einheit gleich setzen wollen, ein Bogen vorgelegt, dessen Sinus $= x$ sei, welchen Bogen wir auf diese Weise $\arcsin x$ ausdrücken wollen, und das Differential dieses Bogens wollen wir ausfindig machen oder den Zuwachs finden, welcher ihm zukommt, wenn der Sinus von x um sein Differential vermehrt wird. Dies wird aber mit Hilfe der Differentiation von Logarithmen geleistet werden können, weil wir in der *Introductio* [§ 138] gezeigt haben, dass dieser Ausdruck $\arcsin x$ auf diesen logarithmischen reduziert werden kann $\frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\sqrt{1-xx} + x\sqrt{-1})$. Nachdem also $y = \arcsin x$ gesetzt worden ist, wird auch gelten

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\sqrt{1-xx} + x\sqrt{-1});$$

diese gibt differenziert [§ 182, VII]

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{-xdx}{\sqrt{1-xx}} + dx\sqrt{-1} \right)}{\sqrt{1-xx} + x\sqrt{-1}} = \frac{dx(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx})}{(\sqrt{1-xx} + x\sqrt{-1})\sqrt{1-xx}},$$

woher wird

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

§195 Dieses Differential eines Kreisbogens kann auch auf diese Weise leichter ohne Hilfe von Logarithmen gefunden werden. Wenn nämlich $y = \arcsin x$ ist, wird x der Sinus des Bogens y oder $x = \sin y$ sein. Weil also nach Setzen von $x + dx$ anstelle von x y in $y + dy$ übergeht, wird $x + dx = \sin(y + dy)$ werden. Aber weil gilt

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \sin b,$$

wird gelten

$$\sin(y+dy) = \sin y \cdot \cos dy + \cos y \cdot \sin dy;$$

aber der Sinus des verschwindenden Bogens dy wird jenem Bogen dy selbst und sein Kosinus dem ganzen Sinus gleich [§ 201]; dieser Sache wegen wird werden

$$\sin(y+dy) = \sin y + dy \cos y \quad \text{und daher} \quad x + dx = \sin y + dy \cos y.$$

Weil aber $\sin y = x$ ist, wird der Kosinus von y - oder $\cos y$ - $= \sqrt{1-xx}$ sein, nach Einsetzen welcher Werte $dx = dy\sqrt{1-xx}$ sein wird, woraus wir erhalten

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

Also wird das Differential des Bogens, dessen Sinus vorgelegt wird, dem Differential des Sinus durch den Kosinus dividiert gleich.

§196 Weil also, wenn p irgendeine Funktion von x war und y den Bogen bezeichnet, dessen Sinus $= p$ ist, oder $y = \arcsin p$ ist, das Differential dieses Bogens $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$ ist, wo $\sqrt{1-pp}$ den Kosinus desselben Bogens ausdrückt, wird auch das Differential des Bogens gefunden werden können, dessen Kosinus vorgelegt wird. Es sei nämlich $y = \arccos x$; der Sinus desselben Bogens wird nämlich $= \sqrt{1-xx}$ und daher $y = \arcsin \sqrt{1-xx}$ sein. Nachdem also $p = \sqrt{1-xx}$ gesetzt worden ist, wird gelten

$$dp = \frac{-xdx}{\sqrt{1-xx}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-pp} = x;$$

daher wird werden

$$dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

Also wird das Differential des Bogens, dessen Kosinus vorgelegt wird, dem Differential des Kosinus negativ genommen und durch den Sinus desselben Bogens dividiert gleich.

Dies kann auch auf diese Weise gezeigt werden. Wenn $y = \arccos x$ ist, werde $z = \arcsin x$ gesetzt; es wird $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ sein; aber die Bogen y und z geben zusammen genommen den konstanten Bogen 90° und es wird $y + z =$ Konstante und daher $dy + dz = 0$ oder $dy = -dz$ sein; daher wird $dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$ - wie zuvor.

§197 Wenn also ein zu differenzierender Bogen vorgelegt wird, dessen Tangens gegeben ist, so dass $y = \arctan x$ ist, aber der Bogen, dessen Tangens x ist, wird der Sinus $= \frac{x}{\sqrt{1+xx}}$ und der Kosinus $= \frac{1}{\sqrt{1+xx}}$ sein. Nachdem also $\frac{x}{\sqrt{1+xx}} = p$ gesetzt worden ist, dass $\sqrt{1-pp} = \frac{1}{\sqrt{1+xx}}$ ist, wird $y = \arcsin p$ sein; daher wird nach der gerade angegeben Regel $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$ sein. Aber wegen $p = \frac{x}{\sqrt{1+xx}}$ wird $dp = \frac{dx}{(1+xx)^{3}2}$ sein, nach Einsetzen welcher Werte werden wird

$$dy = \frac{dx}{1+xx}.$$

Also wird das Differential des Bogens, dessen Tangens vorgelegt wird, dem Differential des Tangens durch das Quadrat des Sekans dividiert gleich. Es ist nämlich $\sqrt{1+xx}$ der Sekans, wenn x der Tangens ist.

§198 Wenn auf die gleiche Weise der Bogen vorgelegt wird, dessen Kotangens gegeben ist, so dass $y = \operatorname{arccot} x$ ist, weil der Tangens desselben Bogens $= \frac{1}{x}$ ist, wird nach Setzen von $\frac{1}{x} = p$ $y = \arctan p$ und deshalb $dy = \frac{dp}{1+pp}$ sein. Weil nun $dp = \frac{-dx}{xx}$ ist, wird nach der Substitution gelten

$$dy = \frac{-dx}{1+xx},$$

welches *das Differential des Kotangens negativ genommen und durch das Quadrat des Kosekans dividiert* ist.

Wenn $y = \operatorname{arcsec} x$ vorgelegt wird, weil $y = \arccos \frac{1}{x}$ ist, wird werden

$$dy = \frac{dx}{xx\sqrt{1 - \frac{1}{xx}}} = \frac{dx}{x\sqrt{xx-1}}.$$

Und wenn $y = \operatorname{arccsc} x$ ist, wird $y = \arcsin \frac{1}{x}$ sein und daher gelten

$$dy = \frac{-dx}{x\sqrt{xx-1}}.$$

Oft tritt auch der Sinus versus auf; wenn so $y = \operatorname{arcsv} x$ vorgelegt wird, weil $y = \arccos(1-x)$ und der Sinus dieses Bogens $= \sqrt{2x - xx}$ ist, wird werden

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}.$$

Obwohl also der Bogen, dessen Sinus oder Kosinus oder Tangens oder Kotangens oder Sekans oder Kosekans oder schließlich Sinus versus gegeben ist, eine transzendente Größe ist, wird ihr Differential, wenn es durch dx dividiert wird, eine algebraische Größe sein und deshalb auch ihre zweiten, dritten, vierten etc. Differentiale, wenn sie durch die entsprechenden Potenzen von dx dividiert werden. Dazu, damit diese Differentiation besser verstanden wird, haben wir die folgenden Beispiele hinzugefügt.

I. Wenn $y = \arcsin 2x\sqrt{1-xx}$ ist, werde $p = 2x\sqrt{1-xx}$ gesetzt, dass $y = \arcsin p$ ist, und es wird $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$ sein. Aber es ist

$$dp = 2dx\sqrt{1-xx} - \frac{2xxdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2dx(1-2xx)}{\sqrt{1-xx}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-pp} = 1 - 2xx,$$

nach Einsetzen welcher Werte gelten wird

$$dy = \frac{2dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

Dies tritt auch daher klar zu tage, dass $2x\sqrt{1-xx}$ der Sinus des doppelten Bogens ist, während x der einfache Sinus ist; es wird also $y = 2\arcsin x$ und daher $dy = \frac{2dx}{\sqrt{1-xx}}$ sein.

II. Wenn $y = \arcsin \frac{1-xx}{1+xx}$ ist, werde $\frac{1-xx}{1+xx} = p$ gesetzt; es wird sein

$$dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-pp} = \frac{2x}{1+xx}.$$

Daher, weil $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$ ist, wird sein

$$dy = \frac{-2dx}{1+xx}.$$

III. Wenn $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ ist, werde $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$; es wird gelten

$$\sqrt{1-pp} = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \quad \text{und} \quad dp = \frac{-dp}{4\sqrt{\frac{1-x}{2}}},$$

woher wird

$$dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-xx}}.$$

IV. Wenn $y = \arctan \frac{2x}{1-xx}$ ist, wird nach Setzen von $p = \frac{2x}{1-xx}$ gelten

$$1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2} \quad \text{und} \quad dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}.$$

Daher, weil nach der Regel für Tangenten $dy = \frac{dp}{1+pp}$ (§ 197) ist, wird gelten

$$dy = \frac{2dx}{1+xx}.$$

V. Wenn $y = \arctan \frac{\sqrt{1+xx}-1}{x}$ ist, wird nach Setzen von $p = \frac{\sqrt{1+xx}-1}{x}$ werden

$$pp = \frac{2+xx-2\sqrt{1+xx}}{xx}$$

und

$$1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{1+xx}}{xx} = \frac{2(\sqrt{1+xx}-1)(\sqrt{1+xx})}{xx}$$

sowie

$$dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{1+xx}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{1+xx}-1)}{xx\sqrt{1+xx}}.$$

Daher, weil $dy = \frac{dp}{1+pp}$ ist, wird werden

$$\arctan\frac{\sqrt{1+xx}-1}{x} = \frac{1}{2}\arctan x.$$

VI. Wenn $y = e^{\arcsin x}$ ist, wird diese Formel auch durch das Vorhergehende differenziert werden können; es wird nämlich werden

$$dy = e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

Auf diese Weise werden also alle Funktionen von x, in welche außer Logarithmen und Exponentialgrößen auch Kreisbogen eingehen, differenziert werden können.

§200 Weil ja die Differentiale der Bogen durch dx dividiert algebraische Größen sind, werden deren zweite und folgenden Differentiale durch das, was wir über die Differentiation von algebraischen Funktionen erläutert haben, gefunden werden werden. Es sei $y = \arcsin x$; weil $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ ist, wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$ sein, dessen Differential den Wert für $\frac{ddy}{dx^2}$ geben wird, wenn freilich dx konstant angenommen wird; daher werden sich die Differentiale einer jeden Ordnung so verhalten.

Wenn $y = \arcsin x$ ist, wird gelten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-xx}}$$

und für konstant angenommenes dx

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$
$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

etc.,

woher wir schließen, dass wie oben (§ 177) allgemein gelten wird

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{\begin{array}{l} x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4} \\ +\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^{n-6} + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

§201 Es sind die Größen übrig, die aus der Inversion von diesen entsprießen, natürlich die Sinus oder die Tangenten der gegebenen Bogen, wie welche differenziert werden müssen, wir nun zeigen wollen. Es sei also x ein Kreisbogen und $\sin x$ bezeichne seinen Sinus, dessen Differential wir ausfindig machen wollen. Wir wollen $y = \sin x$ setzen und nach Setzen von $x + dx$ anstelle von x, weil y in $y + dy$ übergeht, wird $y + dy = \sin(x + dx)$ sein und daher

$$dy = \sin(x+dx) - \sin x.$$

Es ist aber

$$\sin(x+dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx,$$

und weil, wie wir in der *Introductio* gezeigt haben, gilt

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.},$$

wird nach Verwerfen der verschwindenden Terme $\cos dx = 1$ und $\sin dx = dx$ sein, woher dann wird

$$\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x.$$

Daher wird für $y = \sin x$ gesetzt sein

$$dy = dx \cos x.$$

Das Differential des Sinus eines gewissen Bogens wird als dem Differential des Bogens mit dem Kosinus multipliziert gleich.

Wenn also p irgendeine Funktion von x war, wird auf die gleiche Weise gelten

$$d.\sin p = dp \cos p.$$

§202 Gleichermaßen, wenn $\cos x$ oder der Kosinus des Bogens x vorgelegt wird, dessen Differential ausfindig gemacht werden soll, werde $y = \cos x$ gesetzt und nach Setzen von $x + dx$ anstelle von x wird $y + dy = \cos(x + dx)$ werden. Es ist aber

$$\cos(x + dx) = \cos x \cdot \cos dx - \sin x \cdot \sin dx,$$

und weil, wie wir gerade gesehen haben, $\cos dx = 1$ und $\sin dx = dx$ ist, wird sein

$$y + dy = \cos x - dx \sin x$$

und daher

$$dy = -dx \sin x.$$

Daher wird das Differential des Kosinus eines gewissen Bogens dem negativ genommenen Differential des Bogens mit dem Sinus desselben multipliziert gleich.

So, wenn p irgendeine Funktion von x war, wird gelten

$$d.\cos p = -dp \sin p.$$

Diese Differentiationen können auch aus dem zuvor Erwähnten auf diese Weise gefunden werden. Wenn $y = \sin p$ war, wird $p = \arcsin y$ sein und es wird gelten

$$dp = \frac{dy}{\sqrt{1-yy}};$$

aber wegen $y = \sin p$ wird $\cos p = \sqrt{1-pp}$ sein, nach Einsetzen welches Wertes $dp = \frac{dy}{\cos p}$ sein wird und gelten wird

$$dy = dp \cos p$$

- wie zuvor. Auf die gleiche Weise, wenn $y = \cos p$ ist, wird $\sqrt{1-yy} = \sin p$ und $p = \arccos y$ sein und daher

$$dp = \frac{-dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{-dy}{\sin p},$$

woher wie zuvor wird

$$dy = -dp \sin p.$$

§203 Wenn $y = \tan x$ war, wird gelten

$$dy = \tan(x+dx) - \tan x;$$

aber es ist

$$\tan(x+dx) = \frac{\tan x + \tan dx}{1 - \tan x \cdot \tan dx};$$

wenn von diesem Bruch der Tangens von x subtrahiert wird, wird zurückbleiben

$$dy = \frac{\tan dx(1 + \tan x \cdot \tan x)}{1 - \tan x \cdot \tan dx}.$$

Aber der Tangens des verschwindenden Bogens dx ist dem Bogen selbst gleich und daher ist $\tan dx = dx$ und der Nenner $1 - dx \tan dx$ geht in die Einheit über; deshalb wird werden

$$dy = dx(1 + \tan^2 x).$$

Es ist aber

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

während $\cos^2 x$ das Quadrat des Kosinus von x ist; als logische Konsequenz, wenn $y = \tan x$ war, wird gelten

$$dy = dx \sec^2 x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Dieses Differential kann auch durch Differentiation des Sinus und Kosinus gefunden werden; weil nämlich $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist, wird natürlich [§ 164] gelten

$$dy = \frac{dx \cos x \cdot \cos x + dx \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

- wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

§204 Auch dies kann anders gefunden werden. Weil nämlich $y = \tan x$ ist, wird $x = \arctan y$ sein und nach den obigen Vorschriften wird werden

$$dx = \frac{1}{1 + yy}.$$

Aber weil $y = \tan x$ ist, wird $\sqrt{1 + yy} = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ sein und daher $dx = dy \cos^2 x$ und auch

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

wie zuvor. *Das Differential eines jeden Tangens wird also dem Differential des Bogens durch das Quadrat des Kosinus desselben Bogens dividiert gleich.*

Wenn auf die gleiche Weise $y = \cot x$ vorgelegt wird, wird $x = \operatorname{arccot} y$ werden und daher

$$dx = \frac{-dy}{1+yy}.$$

Aber es wird hingegen $\sqrt{1+yy} = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ sein, woher man $dx = -dy \sin^2 x$ haben wird sowie

$$dy = \frac{-dx}{\sin^2 x}.$$

Das Differential eines jeden Kotangens wird also dem Differential des Bogens negativ genommen und durch das Quadrat des Sinus desselben Bogens dividiert gleich.

Oder, weil $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist, wird durch Differenzieren dieses Bruches werden

$$dy = \frac{-dx \sin^2 x - dx \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-dx}{\sin^2 x}.$$

wie wir gerade gefunden haben.

§205 Wenn der Sekans eines Bogens vorgelegt wird, dass $y = \sin x$ ist, weil $y = \frac{1}{\cos x}$ sein wird, wird gelten

$$dy = \frac{dx \sin x}{\cos^2 x} = dx \tan x \sec x.$$

Wenn auf die gleiche Weise $y = \csc x$ war, wird wegen $y = \frac{1}{\sin x}$ sein

$$dy = \frac{-dx \cos x}{\sin^2 x} = -dx \cot x \csc x,$$

für welche Fälle es überflüssig wäre eigene Regeln zu formulieren. Wenn der Sinus versus oder $y = \text{sv } x$ vorgelegt wird, weil $y = 1 - \cos x$ ist, wird $dy = dx \sin x$ sein. Also werden alle Fälle, in denen eine gewisse gerade auf einen Bogen bezogene Linie vorgelegt wird, weil sie immer mit dem Sinus oder Kosinus ausgedrückt werden kann, ohne Mühe differenziert werden können. Und in der Tat werden nicht nur die ersten Differentiale, sondern auch die zweiten und folgenden mit den gegebenen Regeln gefunden werden. Wir wollen nämlich festlegen, dass $y = \sin x$ und $z = \cos x$ ist und dx konstant ist; es wird sich verhalten wie folgt:

$$
\begin{array}{r|l}
y = \sin x & z = \cos x \\
dy = dx \cos x & dz = -dx \sin x \\
ddy = -dx^2 \cos x & ddz = -dx^2 \cos x \\
d^3y = -dx^3 \cos x & d^3z = dx^3 \sin x \\
d^4y = dx^4 \sin x & d^4z = dx^4 \cos x \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

§206 Auf die gleiche Weise werden die Differentiale aller Ordnungen des Tangens des Bogens x gefunden können. Es sei nämlich $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und dx konstant gesetzt; es wird gelten

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\frac{ddy}{dx^2} &= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x} \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{24\sin x}{\cos^4 x} - \frac{8\sin x}{\cos^3 x} \\
\frac{d^5y}{dx^5} &= \frac{120}{\cos^6 x} - \frac{120}{\cos^4 x} + \frac{16}{\cos^2 x} \\
\frac{d^6y}{dx^6} &= \frac{720\sin x}{\cos^7 x} - \frac{480\sin x}{\cos^5 x} + \frac{32\sin x}{\cos^2 x} \\
\frac{d^7y}{dx^7} &= \frac{5040}{\cos^8 x} - \frac{6720}{\cos^6 x} + \frac{2016}{\cos^4 x} - \frac{64}{\cos^2 x} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§207 Also werden irgendwelche Funktionen, in welche Sinus oder Sinus von Bogen eingehen, mit diesen Vorschriften differenziert werden können, wie sich aus den folgenden Beispielen sehen lässt.

I. Wenn $y = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ ist, wird gelten

$$dy = 2dx\cos^2 x - 2dx\sin^2 x = 2dx\cos 2x.$$

II. Wenn $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ oder $y = \sin\frac{1}{2}x$ ist, wird sein

$$dy = \frac{dx\sin x}{2\sqrt{2(1-\cos x)}}.$$

Weil aber gilt

$$\sqrt{2(1-\cos x)} = 2\sin\frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad \sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x,$$

wird werden

$$dy = \frac{1}{2}dx\cos\frac{1}{2}x,$$

wie aus der Form $y = \sin\frac{1}{2}x$ unmittelbar folgt.

III. Wenn $y = \cos\log\frac{1}{x}$, wird für $\log\frac{1}{x} = p$ gesetzt $y = \cos p$ sein und gelten

$$dy = -dp\sin p.$$

Aber wegen $p = \log 1 - \log x$ wird $dp = \frac{-dx}{x}$ sein und daher

$$dy = \frac{dx}{x}\sin\log\frac{1}{x}.$$

IV. Wenn $y = e^{\sin x}$ ist, wird sein

$$dy = e^{\sin x}dx\cos x.$$

V. Wenn $y = e^{\frac{-n}{\cos x}}$ ist, wird sein

$$dy = -\frac{e^{\frac{-n}{\cos x}}ndx\sin x}{\cos^2 x}.$$

VI. Wenn $y = \log\left(1 - \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\sin x}}}\right)$ ist, werde $e^{\frac{-n}{\sin x}} = p$ gesetzt und wegen

$$y = \log(1 - \sqrt{1-p})$$

wird gelten

$$dy = \frac{dp}{2(1 - \sqrt{1-p})\sqrt{1-p}}.$$

Aber es ist

$$dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}} n dx \cos x}{\sin^2 x}.$$

Nach Einsetzen dieses Wertes wird hervorgehen

$$dy = \frac{n e^{\frac{-n}{\sin x}} dx \cos x}{2 \sin^2 x \left(1 - \sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\sin x}}}\right)\sqrt{1 - e^{\frac{-n}{\sin x}}}}.$$